Chapitre 19

Systèmes linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ et le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et notations

Définition 19.1

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $(b_i)_{1 \le i \le n}$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ (tous fixés : leur valeur est connue).

- $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues du système $(\mathcal{S})$.
- Les a_{ij} sont les coefficients du système $(\mathcal{S})$.
- Le n-uplet $(b_1, \cdots, b_n)$ est appelé le second membre du système $(\mathcal{S})$.
- Si $b_1 = \cdots = b_n = 0$, on dit que $(\mathcal{S})$ est un système homogène ou sans second membre.
- On appelle système homogène associé à $(\mathcal{S})$ le système obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ de $(\mathcal{S})$ par $(0, 0, \cdots, 0)$, càd $(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = 0 \end{cases}$

Exemple 1. Le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+6y=7 \end{cases}$ est linéaire. Son système homogène associé est $(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+6y=0 \end{cases}$

Exemple 2. Dire si les systèmes suivants sont linéaires (les inconnues sont notées x, y, z) :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x+6y=0 \\ 6x+3y=1 \\ 2x=5 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ z=2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_4) : \begin{cases} 2x+5y=4z \\ xy=0 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_5) : \begin{cases} 0=0 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_6) : \begin{cases} x^2=0 \\ y=3 \end{cases}$$

Propriété 19.2

En reprenant les notations de la Définition 19.1, en posant

$$A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Alors $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $AX=B$.

- L'équation matricielle $AX=B$ est appelée <u>écriture matricielle</u> du système $(\mathcal{S})$.
- La matrice A est appelée la <u>matrice</u> du système $(\mathcal{S})$.
- Le système $(\mathcal{S}_0)$ a donc pour écriture matricielle $AX=0$.

Par extension, on dira souvent qu'une équation matricielle $AX=B$ est un système linéaire. Chaque équation rajoute une ligne aux matrices A et b. Chaque inconnue rajoute une colonne à la matrice A et une ligne à X.

Exemple 3. Le système linéaire

$$\begin{cases} x+3y+4z & =0 \\ -2x-3y & =1 \end{cases}$$

se réécrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. Résoudre le système $3I_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Notation. On reprend les notations de la partie 1. On note S et S_0 l'ensemble des solutions des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ respectivement.

Remarque. Par la propriété 19.2, pour trouver S, donc les solutions de $(\mathcal{S})$, on peut ou bien résoudre $(\mathcal{S})$ mis sous la forme d'un système d'équations, ou bien résoudre $(\mathcal{S})$ mis sous la forme matricielle.
En pratique, on identifie tout élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à un élément $\mathbb{K}^p$. Ainsi on pourra écrire indifféremment :

$$S = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad | \quad AX = B \right\} \quad = \quad \left\{ (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases} \right\}$$

Définition 19.3

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit <u>compatible</u> s'il admet au moins une solution, i.e. si $S \neq \varnothing$.
Il est dit <u>incompatible</u> s'il n'admet pas de solution, i.e. si $S = \varnothing$.

Exemple 5. Le système linéaire $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ est incompatible : $S = \varnothing$.
Un système homogène $AX = 0$ est toujours compatible : en effet $X = 0_{p,1} \in S_0$, si bien que $S_0 \neq \varnothing$.

Étant donné le système (linéaire) $(\mathcal{S}) : AX = B$, le système homogène associé est $(\mathcal{S}_0) : AX = 0$. Ainsi

$$S_0 = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$$

Propriété 19.4

Si X_{part} est une solution (particulière) de $(\mathcal{S})$, càd $X_{\text{part}} \in S$, alors

$$S = \{X_{\text{part}} + Z \mid Z \in S_0\} = X_{\text{part}} + S_0$$

Autrement dit $X \in S$ si et seulement si $\quad \exists Z \in S_0 \qquad X = X_{\text{part}} + Z.$

Démonstration.

$\square$

Comme pour les équations différentielles linéaires, pour trouver toutes les solutions de $(\mathcal{S})$, on pourrait trouver une solution particulière ainsi que toutes les solutions du système homogène. Toutefois, pour résoudre un système en pratique, on procédera plutôt par équivalences, en résolvant non pas $(\mathcal{S})$ mais un système $(\mathcal{S}')$ plus simple et qui lui est équivalent, cf section suivante.

3 Opération élémentaire

Définition 19.5

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est équivalent à un système linéaire $(\mathcal{S}')$ si les systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ ont les mêmes ensembles de solution.

La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations (dites élémentaires) sur un système $(\mathcal{S})$ afin de se ramener à un système $(\mathcal{S}')$ plus simple qui est équivalent à $(\mathcal{S})$.

Définition 19.6 (Opération élémentaire)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire dont on note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes correspondant à chaque équation. On appelle opération élémentaire une de ces trois opérations sur les lignes de $(\mathcal{S})$:

- Dilatation **:** on multiplie une ligne L_i par un élément $\mu \in \mathbb{K}^*$: $\boxed{L_i \leftarrow \mu L_i}$.
- Permutation **:** on échange deux lignes L_i et L_j : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- Transvection **:** on ajoute à L_i une ligne L_j (avec $i \neq j$) multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$: $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

Propriété 19.7

Toute opération élémentaire effectuée sur un système linéaire $(\mathcal{S})$ le transforme en un système linéaire qui lui est équivalent.

Démonstration. Admis pour le moment. □

Exemple 6. Résoudre $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 7 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

4 Algorithme du pivot de Gauss

Définition 19.8

On appelle matrice échelonnée une matrice (pas forcément carrée) de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
 & \boxed{*} & * & * & * & * & * & * & * & * & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & \boxed{*} & * & * & * & * & & * & * & * & * \\
(0) & 0 & & (0) & & 0 & & & & \boxed{*} & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & (0) & & 0 & \ddots & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & \boxed{*} & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & 0 & & & \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & 0 & & (0) &
\end{pmatrix}$$

où :

- $*$ désigne un élément quelconque de $\mathbb{K}$.
- $\boxed{*}$ désigne un élément **non nul** quelconque de $\mathbb{K}$, appelé pivot de la matrice échelonnée.
- (0) désigne un bloc rempli de zéros : ci-dessus chaque bloc est représenté avec une largeur de trois colonnes, mais en fait chaque bloc peut avoir une largeur différente. Il est même possible qu'un ou plusieurs blocs soient de largeur "zéro colonne".

Exemple 7. Les matrices de formes suivantes sont échelonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * & * \\ & & & \boxed{*} & * & * \\ & & & & \boxed{*} & * \\ \mathbf{0} & & & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Exemple 8. Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Étant donné un système linéaire $AX = B$, on lui associe sa matrice augmentée comme étant la matrice

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

Pour résoudre $AX = B$, l'algorithme du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les ***lignes*** de la matrice augmentée (ce qui affecte également les coefficients $b_1, \cdots, b_n$) de façon à se ramener à une matrice échelonnée à gauche de la barre, cf ci-dessous :

Méthode (Algorithme du pivot de Gauss)

On regarde la première colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ de la matrice augmentée.

1. **Recherche du pivot (cas $a_{11} \neq 0$).** Si $a_{11} \neq 0$: on l'encadre. Ce sera un pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

2. **Élimination des termes sous le pivot.** Par des transvections, on fait apparaitre des 0 sous $\boxed{a_{11}}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{array}$$

3. **On poursuit avec une "sous-matrice".** On recommence l'algorithme à l'étape 1 avec la sous-matrice augmentée qui contient les termes $*$ (en rouge ci-dessous, ou encadré sur votre poly papier) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right)$$

1bis **Recherche du pivot (cas $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$).** Si toute la première colonne est nulle, on recommence l'algorithme à l'étape 1 avec la sous-matrice qui contient les termes $*$ (en rouge ci-dessous, ou encadré sur votre poly papier).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right)$$

1ter **Recherche du pivot (cas $a_{11} = 0$ mais colonne non nulle).** Si $a_{11} = 0$ mais que la première colonne contient un terme non nul, on en choisit un : par exemple $a_{i_0 1} \neq 0$. On fait la permutation $L_{i_0} \leftrightarrow L_1$: on obtient un système de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{a_{i_0 1}} & & & b_{i_0} \\ a_{21} & & & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & \cdots & b_{11} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & b_n \end{array}\right)$$

et on élimine les termes sous le pivot comme à l'étape 2.

Méthode (Pivot de Gauss, suite)

À chaque fois qu'on revient à l'étape 1, la taille de la matrice augmentée qu'on considère diminue d'une colonne (et éventuellement d'une ligne). On continue l'algorithme jusqu'à ce que la sous-matrice n'ait plus de colonne à gauche de la barre verticale. On obtient alors une matrice échelonnée à gauche de cette barre, qu'on notera A', tandis que la matrice à droite de la barre sera notée B' :

$$(A \mid B) \underset{\text{op. élém.}}{\rightsquigarrow} (A' \mid B') \qquad \text{avec } A' \quad \text{échelonnée}$$

Par la propriété 19.7, comme on a effectué uniquement des opérations élémentaires, on a

$$AX = B \iff A'X = B'$$

Pour résoudre le système initial, on peut alors revenir à l'écriture "système d'équations" de $A'X = B'$ et trouver les solutions.

Exemple 9. Résoudre $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0 \end{cases}$

Cet exemple est simple car les cas 1bis et 1ter de l'algorithme n'arrivent jamais. De plus, il y a autant de pivots que d'inconnues, donc on obtient un système "triangulaire" qu'on peut remonter facilement pour parvenir à la solution. Le cas général est plus complexe. On va d'abord voir des exemples d'application de l'algorithme du pivot pour l'échelonnement. On résoudra ensuite les systèmes linéaires en section suivante.

5 Résolution d'un système après échelonnement

Voilà un exemple typique de système échelonné :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{5} & * & * & * & * & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & * & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 \end{array}\right)$$

Parmi les variables (inconnues) $x_1, \cdots, x_p$, toute variable dont la colonne correspondante de A' possède un pivot est appelée une variable pivot. Les variables qui n'ont pas de pivot dans leurs colonnes respectives sont appelées des variables libres. Dans l'exemple ci-dessus, les variables pivots sont x_1, x_4, x_5 et les variables libres sont x_2, x_3.

Méthode (Résolution après échelonnement)

Lorsqu'on repasse en écriture "système d'équations" :

1. Les lignes sans pivot sont les lignes remplies de zéros à gauche de la barre : elles donnent des équations dites de "compatibilités". Ces équations sont toujours de la forme $0 = \beta_i$, où β_i est le coefficient de la ligne correspondante de B'.
   - Le système sera compatible si et seulement si chaque β_i est nul. Alors, ces équations deviennent $0 = 0$ et ne jouent plus de rôle pour déterminer l'ensemble des solutions.
2. Les lignes avec pivot donnent des équations dites "pivots" : on les résout usuellement "de bas en haut" : chaque variable pivot doit être isolée et exprimée en fonctions des variables libres et/ou des β_i.
3. L'ensemble des solutions correspond aux p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ où les variables pivots vérifient les équations pivots, tandis que les variables libres prennent des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$.
   - On peut aussi substituer les variables pivots par l'expression des équations pivots et obtenir une expression paramétrique en fonction des variables libres (qui prennent des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$).

Ainsi, s'il y a des variables libres, la solution n'est pas unique.

Exemple 10. Déterminer les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant admette au moins une solution puis le résoudre pour $(a, b, c) = (1, 1, 1)$: $\begin{cases} x + 4y + 7z = a \\ 2x + 5y + 8z = b \\ 3x + 6y + 9z = c \end{cases}$

Exemple 11. Résoudre $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ -2x-4y-5z=6 \\ x+2y+z=15 \end{cases}$

Exemple 12. Résoudre $\begin{cases} x+2y+z-2t=6 \\ 2x+2z+4t=2 \\ 2x+4z+t=3 \end{cases}$

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, on a mis la matrice sous forme échelonnée réduite : on fait apparaitre des zéros *au-dessus* de chaque pivot. C'est une étape facultative avant de repasser en “mode système” : une fois réalisée, il n'y a qu'une variable pivot par équation pivot et il n'y a plus qu'à les isoler en passant de l'autre côté toutes les variables libres.

6 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot

Méthode (Calcul de l'inverse par le pivot de Gauss)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à vérifier si A est inversible et, si c'est le cas, à calculer A^{-1}. On construit d'abord une matrice augmentée

$$(A \mid I_n)$$

Puis, par des opérations élémentaires (dilatation, permutation, transvection) sur les ***lignes*** on échelonne la matrice A, à gauche de la barre.

- Si dans la matrice échelonnée il y a n pivots, càd qu'on obtient une matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{*} & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \boxed{*} & \end{array}\right)$$

alors A est inversible. On se ramène alors par des opérations élémentaires à

$$(I_n \mid A')$$

et dans ce cas, $A' = A^{-1}$ est la matrice inverse recherchée.

- Si dans la matrice échelonnée il y a moins de n pivots, alors A n'est pas inversible : on peut s'arrêter là.

Exemple 13. Vérifier si $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Exemple 14. Vérifier si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Propriété 19.9 (Inversibilité des matrices diagonales)

Soit $D = \text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors $D \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont tous non nuls et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & \alpha_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration. La matrice $D = \text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est déjà sous forme échelonnée : si un α_i est non nul, c'est un pivot, sinon la colonne correspondante est remplie de zéros. Il y a ainsi autant de pivots dans D que de coefficients α_i non nuls.

$D \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle contient n pivots, donc si et seulement si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$. On vérifie alors que la matrice $\text{diag}(\alpha_1^{-1}, \cdots, \alpha_n^{-1})$ est bien l'inverse de D par un calcul direct. D'où le résultat. □

Propriété 19.10 (Inversibilité de matrices triangulaires)

Soit $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que

$$T = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \beta_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$$

Alors $T \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\beta_1, \cdots, \beta_n$ sont tous non nuls et T^{-1} est de la forme

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} & & & *' \\ & \beta_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \beta_n^{-1} \end{pmatrix}$$

(Attention : les termes de $*'$ dans T^{-1} ne sont pas forcément les mêmes que les termes contenus dans $*$ dans T)

Démonstration. La matrice T est déjà sous forme échelonnée : si un β_i est non nul, c'est un pivot, sinon la colonne correspondante ne contient pas de pivot. Il y a ainsi autant de pivots dans T que de coefficients β_i non nuls.
$T \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle contient n pivots, donc si et seulement si $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}^*$.
La forme de T^{-1} peut se démontrer à partir de la méthode du calcul de l'inverse par le pivot de Gauss. $\square$